En route vers la Terminale …

Afin d'aborder au mieux la rentrée en Terminale, l'équipe des enseignants de mathématiques du lycée JP Vernant vous conseille fortement, **à partir du 15 août, de faire cette fiche de « révisions » en vous aidant, si besoin, de vos cours de Première.**

CHOIX POUR LA TERMINALE	Thèmes
Pas de mathématiques	N'oubliez pas que vous devrez peut-être avoir besoin des maths dans vos études ou plus tard… alors faites au minimum ce qui est conseillé aux maths complémentaires
Option Maths Complémentaires	Réviser un peu (ex au choix) les thèmes n° 1- 3 - 4 et 5 / Tout sauf géométrie (thème 2)
Spécialité Maths	Tous les thèmes à faire dans l'ordre proposé afin que vous travailliez en priorité les outils nécessaires dès la première période Septembre-Novembre : **priorité aux thèmes 1 , 2 et 3 pour la rentrée**
Option Maths Expertes	Tous les thèmes

Les enseignants de mathématiques

Qui vous souhaitent avant tout d'excellentes vacances !

Thème 1 : Suites **prioritaire pour la rentrée !**

Exercice 1-1: Suites du type $u_n = f(n)$ Sens de variations — 25min

A- Soit (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n^2 + 4n - 5$

1. Calculer les 3 premiers termes
2. A l'aide de votre calculatrice, conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

Méthode1 :

3. Calculer $u_{n+1} - u_n$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n)

Méthode2 :

4. Etudier les variations sur $[0\,;+\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 + 4x - 5$
5. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

B- Soit (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{4+n}{3^n}$

1. Calculer les 3 premiers termes
2. A l'aide de votre calculatrice, conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

Méthode3 :

3. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
4. Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n)

Exercice 1-2: Suites arithmétiques, géométriques et sommes — 15min

1. Calculer : 1+2+………..+90
2. Calculer : $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^9$
3. Soit (u_n) la suite arithmétique de raison 0,2 et de 1er terme $u_0 = 3$.
   a) Donner le sens de variation de la suite (u_n).
   b) Exprimer pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.
   c) Calculer : $u_3 + u_4 + \cdots + u_{25}$

4. Soit (v_n) la suite géométrique de raison 0,2 et de 1er terme $v_0 = 3$.
   a) Donner le sens de variation de la suite (v_n).
   b) Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
   c) Calculer : $v_3 + v_4 + \cdots + v_{25}$

Exercice 1-3: Algorithmes et suites — 15min

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} u_0 = 2{,}5 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2 \end{cases}$

Pour chaque algorithme donner la valeur qu'il renvoie **et** dire à quoi cela correspond pour la suite (u_n).

```
def exo1():
    u=2.5
    for k in range(4):
        u=3*u-2
    return(u)
```

```
def exo2():
    u=2.5
    for k in range(1,5):
        u=3*u-2
    return(u)
```

```
def exo3():
    u=2.5
    n=0
    while u <100000 :
        u=3*u-2
        n= n+1
    return(n)
```

```
def exo4():
    u=2.5
    L=[u]
    for k in range(4):
        u=3*u-2
        L.append(u)
    return(L)
```

```
def exo5():
    u=2.5
    S=0
    for k in range(4):
        u=3*u-2
        S=S+u
    return(S)
```

Exercice 1-4: Problème sur une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$ — 40min

A l'automne 2010, Eliot achète une maison à la campagne. Il dispose d'un terrain de 1500 m² entièrement engazonné. Mais tous les ans, 20% de la surface engazonnée est détruite et remplacée par de la mousse. Eliot arrache alors, à chaque automne, la mousse sur une surface de 50m² et la remplace par du gazon. Pour tout nombre entier naturel n, on note u_n la surface en m² de terrain engazonné au bout de *n* années, c'est-à-dire à l'automne $2010 + n$. On a donc $u_0 = 1500$

1. Calculer u_1 .
2. Justifier que l'on a, pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 50$.
3. a) A l'aide de votre calculatrice, déterminer si la suite (u_n) $SEMBLE$ arithmétique ou géométrique.
   b) Le démontrer rigoureusement.
4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel *n* par : $v_n = u_n - 250$
   a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.
   b) Exprimer v_n en fonction de n.
   c) En déduire que, pour tout entier naturel $n, u_n = 250 + 1250 \times 0{,}8^n$
   d) Quelle est la surface de terrain engazonné au bout de 4 années ?
5. **a)** On admet que la surface de gazon diminue chaque année.
   Déterminer en justifiant, **à l'aide de la calculatrice**, le plus petit entier *n* tel que :

   $250 + 1250 \times 0{,}8^n < 500$. Interpréter le résultat.

   b) Compléter, l'algorithme pour qu'il affiche
   la solution obtenue à la question précédente.

```
def suite():
    u=1500
    n=0
    while ................ :
        u=..............
        n=..............
    return(n)
```

6. Le voisin d'Eliot, voyant diminuer la surface engazonnée chaque année, pense qu'un jour Eliot n'aura même pas 200m² de gazon dans son jardin. A-t-il raison ? Justifier la réponse.
7. **a)** Démontrer que pour tout entier naturel *n* $u_{n+1} - u_n = -250 \times 0{,}8^n$.
   b) Que peut-on en déduire ?

Thème 2 : Géométrie repérée et non repérée

Exercice 2-1 : Géométrie repérée (révisions de Seconde !) 20min

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les points :

$A(-3\,;6),\ B(2\,;7)\,,C(14\,;-1)$,D $(-1\,;-4),\ E(-4;1{,}5),\ F(3{,}5;3)\,,G(-2;y)$

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$.
2. Calculer les coordonnées du point S sachant que $\overrightarrow{DS}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$.
3. Démontrer que le quadrilatère ABSD est un rectangle.
4. Les droites (AB) et (EF)sont-elles parallèles ?
5. Calculer l'ordonnée de G telle que les points A, B et G soient alignés.

Exercice 2-2 : Géométrie repérée (révisions de Première) 20min

On considère les points A(2 ;1) et B(-1 ;3) dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes

1. a)Calculer $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB}$ à l'aide des coordonnées.
   b)En utilisant une autre expression de $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB}$, déterminer une mesure à 0,1° près de l'angle aigu formé par les vecteurs $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{AB}$
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) perpendiculaire à (AB) passant par A.

Thème 3 : Fonctions polynômes du second degré - fonction exponentielle

Exercice 3-1 : 15min

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-3x^2+11x+4$

1. Calculer Δ.
2. Calculer les racines de $f(x)$. En déduire la forme factorisée de $f(x)$.
3. Donner l'extremum de f (en précisant s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum) et pour quelle valeur de x est-il atteint.
4. En déduire la forme canonique de f.

Exercice 3-2 : 20min

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\frac{x^2+1}{2x+4}=1$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $4x^2+11x-15<-14x+6$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{x^2+1}{2x+4}\geq 1$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\frac{x+1}{2x+1}>\frac{x}{x-1}$

Exercice 3-3 : 15min

Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3-4x^2-4$ et $g(x)=2x^3-3x-5$

1. Déterminer l'expression de la fonction $d(x)=f(x)-g(x)$
2. Etudier la position relative de C_f et C_g.

Exercice 3-4 : **20min**

1. Ecrire sous la forme d'une seule exponentielle : $A = e^{-1} \times e \times e^{-5} \times (e^{-3})^4$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x+1} = 1$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{e^{x^2}}{e^{4x}} > e^{-5} \times e^2$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $4e^{2x} - 3e^x - 1 = 0$

Exercice 3-5 : **20min**

1. Factoriser au maximum: $A = 3x + 27x^2 + 15x^3$
2. Factoriser au maximum : $B = 2xe^{3x} - 3e^{3x} - (4x^2 + 2)e^{3x}$
3. Démontrer que pour tout réel x, $\frac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x} = \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}$
4. Dresser le tableau de signes de f sur son ensemble de définition : $f(x) = \frac{6x^3-8x^2}{e^x-1}$

Thème 4 : Dérivation

Exercice 4-1 : **25min**

Calculer les dérivées des fonctions après avoir précisé les ensembles de dérivabilité 25min

1. f est définie par $f(x) = -5x^4 + 3x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{6}$.
2. f est définie par $f(x) = \frac{1}{x^7}$.
3. f est définie par $f(x) = 6\sqrt{x} - \frac{1}{3}$
4. f est définie par $f(x) = (2x - 1)e^x$.
5. f est définie par $f(x) = \frac{2x+1}{x^2}$.
6. f est définie par $f(x) = 4e^{-2x} + 1$.

Exercice 4-2 : **25min**

Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 3x + 1$ et $g(x) = 2x^3 - 3x - 1$

1. Déterminer l'expression de la fonction $d(x) = f(x) - g(x)$
2. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de *d* et déterminer $d'(x)$.
3. Etudier le signe de d' puis dresser le tableau de variation de d.
4. Déterminer le minimum de d sur $\mathbb{R}$.
5. En déduire la position relative de Cf et Cg.
6. Déterminer l'équation de la tangente à Cf au point d'abscisse 1.
7. Trouver l'abscisse a des points tels que la tangente à Cf en a, soit parallèle à la tangente à Cg en a.

Thème 5 : Probabilités

Exercice 5-1 : **20min**

Dans une promotion de terminale, on dispose des statistiques suivantes :

- Huit élèves sur dix ont révisé avant le baccalauréat
- 95% des élèves ayant révisé sont admis
- 82% des candidats sont admis

Pourtant, après le baccalauréat, devant les résultats affichés au lycée, **tous** les refusés protestent et prétendent avoir révisé sérieusement, alors que tous les admis font les fiers en prétendant qu'ils n'avaient même pas révisé.

Une journaliste venue faire un reportage en direct à la sortie du lycée sur les résultats du bac interroge un élève au hasard.

On considère les événements suivants :

- ✓ A : « le candidat interrogé par la journaliste est admis au baccalauréat»
- ✓ R : « le candidat interrogé par la journaliste a révisé »

Les résultats seront arrondis à 10^{-2} *près si besoin.*

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation.
2. Quelle est la probabilité que la journaliste interroge un candidat admis et ayant révisé ?
3. Quelle est la probalité qu'il soit admis tout en n'ayant pas révisé ?
4. En déduire que $P_{\bar{R}}(A) = 0{,}3$.

On note M l'événement : « le candidat interrogé par la journaliste a menti devant les résultats affichés au lycée»

5. Montrer que la probabilité qu'il ait menti sur le parvis du lycée est de 0,9.
6. Cette fois-ci, la journaliste a choisi un candidat non admis au baccalauréat.
   a. Quelle est la probabilité que ce candidat ait révisé ?
   b. Montrer que la probabilité que ce soit « un menteur » est d'environ 0,78.
7. Y a-t-il plus de chances que le candidat interwievé soit un menteur s'il est admis ou s'il est refusé ?

CORRECTIONS

Thème 1 : Suites

Exercice 1-1:Sens de variations

A- Soit(u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n^2 + 4n - 5$

1. Calculer les 3 premiers termes
   $u_0 = 3 \times 0^2 + 4 \times 0 - 5 = -5$ $\quad u_1 = 3 + 4 - 5 = 2$ $\quad u_2 = 3 \times 4 + 4 \times 2 - 5 = 15$
2. La suite semble croissante et on peut conjecturer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Méthode1 :

3. Calculer $u_{n+1} - u_n$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n)
   $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3(n+1)^2 + 4(n+1) - 5 - (3n^2 + 4n - 5) \\ &= 3n^2 + 6n + 3 + 4n + 4 - 5 - 3n^2 - 4n + 5 \\ &= 6n + 7 \end{aligned}$$
   pour tout entier naturel n, $6n + 7 > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ d'où (u_n)croissante

Méthode2 :

4. Etudier les variations sur $[0\,; +\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 + 4x - 5$

Soit on dérive et on dresse le tableau de variations soit on utilise les connaissances du 2nd degré.

$-\frac{b}{2a} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$ et a = 3 > 0 donc f est croissante sur $[0\,; +\infty[$

5. En déduire le sens de variation de la suite (u_n)
   Comme $u_n = f(n)$ et f est croissante sur $[0\,; +\infty[$ donc (u_n) est croissante.

B- Soit(u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{4+n}{3^n}$

1. Calculer les 3 premiers termes
   $u_0 = 4$ $\quad u_1 = \frac{5}{3}$ $\quad u_2 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$
2. La suite semble décroissante et on peut conjecturer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Méthode3 :

3. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$
   Pour tout entier naturel n, $4 + n > 0$ *et* $3^n > 0$ *donc* $u_n > 0$
4. Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n)
   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5+n}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{4+n} = \frac{5+n}{12+3n}$$

   $\frac{5+n}{12+3n} < 1 \Leftrightarrow 5 + n < 12 + 3n$ car $12+3n > 0 \Leftrightarrow -7 < 2n \Leftrightarrow -3{,}5 < n$

Comme $n \geq 0$, $\frac{5+n}{12+3n} < 1$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$
et comme pour tout entier naturel n, $u_n > 0$,(u_n) est bien décroissante.

Exercice 1-2: Somme de suites

1. Calculer : 1+2+….+90

   Formule $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ $\qquad 1+2+\cdots+90=90\times\frac{91}{2}=4095$

2. Calculer : $1+2+2^2+\cdots+2^9$

   Formule $1+q+q^2+q^3+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $\qquad 1+2+2^2+\cdots+2^9=\frac{1-2^{10}}{1-2}=2^{10}-1$

3. Soit (u_n) suite arithmétique de raison 0,2 et de 1ere terme $u_0=3$
   - **a)** Donner le sens de variation de la suite (u_n)

     r=0,2>0 donc (u_n) suite arithmétique croissante
   - **b)** Exprimer pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.

     Pour tout entier naturel n, $u_n=3+0{,}2n$ $\qquad$ Formule : $u_n=u_0+nr$
   - **c)** Calculer : $u_3+u_4+\cdots+u_{25}$

     25 − 3 +1 =23 termes $\quad u_3=3+0{,}2\times 3=\ 3{,}6\ \ et\ u_{25}=8$

     $u_3+u_4+\cdots+u_{25}=23\times\frac{3{,}6+8}{2}=133{,}4$

4. Soit (v_n) suite géométrique de raison 0,2 et de 1ere terme $u_0=3$.
   - **a)** Donner le sens de variation de la suite (v_n)

     q=0,2, -1 <0,2<1 et $v_0=3>0$ donc (v_n) suite géométrique décroissante
   - **b)** Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

     Pour tout entier naturel n, $v_n=3\times 0{,}2^n$ $\qquad$ Formule : $u_n=u_0\times q^n$
   - **c)** Calculer : $v_3+v_4+\cdots+v_{25}$

     $v_3=0{,}024;$ $\quad$ 25 − 3 +1 =23 termes

     donc $v_3+v_4+\cdots+v_{25}=0{,}024\times\frac{1-0{,}2^{23}}{1-0{,}2}=0{,}03(1-0{,}2^{23})$

Exercice 1-3: Algo et suites

```
>>> exo1()
122.5
>>> exo2()
122.5
>>> exo3()
11
```

Il donne u_4

k	initialisation	0	1	2	3
u	2,5	5,5	14,5	41,5	122,5

Il donne aussi u_4

k	initialisation	1	2	3	4
u	2,5	5,5	14,5	41,5	122,5

Il donne le plus petit rang tel que

u soit supérieur ou égal à 100 000

n	0	1	2	……	10	11
u	2,5	5,5	14,5		88575	265722>100 000

```
>>> exo4()
[2.5, 5.5, 14.5, 41.5, 122.5]
>>> exo5()
184.0
```

Il range et affiche dans une liste les valeurs de u_0 à u_4

Il donne la somme de u_1 à u_4

k	initialisation	0	1	2	3
u	2,5	5,5	14,5	41,5	122,5
S	0	5,5	20	61,5	184

Exercice 1-4:

Pour tout nombre entier naturel *n*, on note u_n la surface en m² de terrain engazonné au bout de *n* années, c'est-à-dire à l'automne 2010+n. On a donc u_0=1500

1. $u_1 = 0{,}8 \times 1500 + 50 = 1250$
2. Chaque année, la surface de gazon diminue de 20% donc on multiplie u_n par 0,8,

   et on replante 50m² de gazon d'où $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 50$
3. a) A l'aide de votre calculatrice, déterminer si la suite (u_n) $SEMBLE$ arithmétique ou géométrique.

   Mode suite type u(n+1) nmin = 0 u(n+1)=0,8*u(n)+50 u(0)= 1500

   D'après le tableau de valeurs : (u_n) NE $SEMBLE$ ni arithmétique ni géométrique

   b) Le démontrer. $u_0 = 1500$ $u_1 = 1250$ et $u_2 = 1050$

   $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$ donc La suite (u_n) n'est pas arithmétique

   $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$ donc La suite (u_n) n'est pas géométrique

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout nombre entier naturel *n* par : $v_n = u_n - 250$
   - **a)** Pour tout $n \epsilon \mathbb{N}$, on a :

     $v_{n+1} = u_{n+1} - 250 = 0{,}8u_n + 50 - 250 = 0{,}8u_n - 200 = 0{,}8(u_n - 250) = 0{,}8v_n$

     Donc (v_n) est bien **géométrique de raison** $\boldsymbol{q = 0,8}$, et de premier terme $\boldsymbol{v_0 = u_0 - 250 = 1250}$
   - **b)** (v_n) étant géométrique, on a pour tout n$\epsilon\mathbb{N}$: $v_n = v_0 \times q^n$, donc $\boldsymbol{v_n = 1250 \times 0,8^n}$
   - **c)** Pour tout entier naturel n, $u_n = v_n + 250$ donc $\boxed{\boldsymbol{u_n = 250 + 1250 \times 0,8^n}}$
   - **d)** $u_4 = 250 + 1250 \times 0{,}8^4 = 762$

     La surface de terrain engazonné au bout de 4 années est donc de **762m²**

5. a) Grâce au tableur de la calculatrice on voit que les premiers termes de la suite (u_n) sont supérieurs à 500, et u_7≈512,1 et u_8≈459,7

   b) On en déduit que le plus petit entier *n* tel que $250 + 1250 \times 0{,}8^n < 500$ est $\boldsymbol{n = 8}$

```
def suite():
    u=1500
    n=0
    while u>=500:
        u=0.8*u+50
        n=n+1
    return(n)
```

   Au bout de 8 ans, la surface engazonnée est inférieure à 500m^2

6. Le voisin d'Eliot, voyant diminuer la surface engazonnée chaque année, pense qu'un jour Eliot n'aura même pas 200m² de gazon dans son jardin. A-t-il raison ? Justifier la réponse.

   Dire qu'il y a moins de 200 m² de pelouse revient à écrire : $u_n < 200 \Leftrightarrow 250+1250\times0{,}8^n < 200$

   $\Leftrightarrow$ $1250\times0{,}8^n < -50$ ce qui est impossible . Donc le voisin d'Eliot a tort.

7. a) Démontrer que $u_{n+1} - u_n = -250 \times 0{,}8^n$.

   $u_{n+1} - u_n = 250 + 1250 \times 0{,}8^{n+1} - (250 + 1250 \times 0{,}8^n)$

   $= 1250 \times 0{,}8^n(0{,}8 - 1) = 1250 \times 0{,}8^n(-0{,}2) = -250 \times 0{,}8^n$.

   b) Que peut-on en déduire ?

   pour tout entier naturel ,$u_{n+1} - u_n < 0$ donc (u_n) suite décroissante

Thème 2 : Géométrie repérée et non repérée

Exercice 2-1 :

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points :

$A(-3\,;6)$, $B(2\,;7)$, $C(14\,;-1)$,D $(-1\,;-4)$, $E(-4;1{,}5)$, $F(3{,}5;3)$, $G(-2;y)$

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$.

   $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1-14\\-4-(-1)\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-15\\-3\end{pmatrix}$

2. Calculer les coordonnées du point S sachant que $\overrightarrow{DS} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$.

   $-\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\times(-15)\\-\frac{1}{3}\times(-3)\end{pmatrix} \Leftrightarrow -\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}\binom{5}{1}$

   Or $\overrightarrow{DS} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DS}\binom{5}{1}$

   D'où $\begin{cases}x_S - x_D = 5\\y_S - y_D = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_S-(-1) = 5\\y_S-(-4) = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_S = 4\\y_S = -3\end{cases}$ Donc $S(4\,;\,-3)$

3. Démontrer que le quadrilatère ABSD est un rectangle.

   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-(-3)\\7-6\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\binom{5}{1}$.

   Or $\overrightarrow{DS}\binom{5}{1}$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DS}$ et ABSD est un parallélogramme.

   Il reste à prouver que c'est un rectangle

   Méthode 1 : diagonales égales

   De plus, $AS^2 = (x_S - x_A)^2 + (y_S - y_A)^2 = (4-(-3))^2 + (-3-6)^2 = 49 + 81 = 130$

   Donc $AS = \sqrt{130}$

   Et $BD^2 = (x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2 = (-1-2)^2 + (-4-7)^2 = 9 + 121 = 130$

   Donc $BD = \sqrt{130}$

   D'où $AS = BD$.

   ABSD est un parallélogramme qui a ses diagonales de même longueur donc c'est un rectangle.

   Méthode 2 : un angle droit

   $\overrightarrow{BS}\begin{pmatrix}2\\-10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\binom{5}{1}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BS} = 10 - 10 = 0$

   donc ABSD est un parallélogramme qui a un angle droit, c'est donc un rectangle

4. Les droites (AB) et (EF)sont-elles parallèles ?

   $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}7{,}5\\1{,}5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\binom{5}{1}$. Det$(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{AB}) = 7{,}5\times 1 - 5\times 1{,}5 = 0$

   $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont donc colinéaires donc les droites $(AB)$$et$ (EF)sont parallèles.

5. Calculer l'ordonnée de G telle que les points A,B et G soient alignés.

   Les points A, B et G sont alignés si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AG}) = 0$

   Or $\overrightarrow{AB}\binom{5}{1}$ et $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\y-6\end{pmatrix}$

   $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AG}) = 0 \Leftrightarrow 5(y-6) - 1 = 0 \Leftrightarrow 5y - 30 - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{31}{5}$

Exercice 2-2 :

On considère les points A(2 ;1) et B(-1 ;3) dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Les questions 1 et 2 sont indépendantes

1. a)Calculer $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB}$ à l'aide des coordonnées.
   $\overrightarrow{AO}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$
   Donc à l'aide de la formule utilisant les coordonnées : $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB} = (-2)\times(-3)+(-1)\times 2 = 4.$
   b)En utilisant une autre expression de $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB}$, déterminer une mesure à 0,1° près de l'angle aigu formé par les vecteurs $\overrightarrow{AO}$ *et* $\overrightarrow{AB}$
   En utilisant la formule (définition) avec le cosinus :
   $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB} = AO\times AB\times\cos(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}) = \sqrt{5}\times\sqrt{13}\times\cos(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}) = \sqrt{65}\times\cos(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB})$
   Ainsi : $\sqrt{65}\times\cos(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}) = 4$
   $\cos(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}) = \frac{4}{\sqrt{65}}$ donc grâce à la calculatrice : $\quad(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}) \approx 60{,}3°.$

2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) perpendiculaire à (AB) passant par A.
   Rappel : une droite de vecteur normal $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ *admet une équation cartésienne de la forme* $ax+by+c=0$
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (d) donc (d) a une équation de la forme : $-3x+2y+c=0.$
   $or\ A\in(d)$ donc $-3\times 2+2\times 1+c=$ d'où c=4 et (d) : $-3x+2y+4=0.$

Thème 3 : Fonctions polynômes du second degré_fonction exponentielle

Exercice 3-1 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2+11x+4$

1. Calculer Δ. $\Delta = b^2-4ac = 169$
2. Calculer les racines de $f(x)$.En déduire la forme factorisée de $f(x)$.
   $\Delta > 0$ *(deux racines)*
   $x_1 = \frac{-11+\sqrt{169}}{-6} = -\frac{1}{3}$ et $x_2 = \frac{-11-\sqrt{169}}{-6} = 4$ D'où $f(x) = -3(x-4)(x+\frac{1}{3})$
3. Donner l'extremum de f (en précisant s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum) et pour quelle valeur de x est-il atteint.
   $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-11}{-6} = \frac{11}{6}$ et $f\left(\frac{11}{6}\right) = \frac{169}{12}$
   $\Delta > 0$ *(deux racines)* et a= -3 < 0 *(parabole tournée vers le bas)* donc f admet $\frac{169}{12}$ comme **maximum**
   atteint pour $x = \frac{11}{6}$
4. En déduire la forme canonique de f.
   D'où $f(x) = -3\left(x-\frac{11}{6}\right)^2+\frac{169}{12}$

Exercice 3-2 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\frac{x^2+1}{2x+4} = 1$
   $2x+4=0 \Leftrightarrow x=-2$
   Pour $x\neq -2, \frac{x^2+1}{2x+4} = 1 \Leftrightarrow x^2+1 = 2x+4 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x_1=-1\ et x_2=3$
   $S=\{-1\,;3\}$

2. Résoudre dans ℝ l'inéquation $4x^2 + 11x - 15 < -14x + 6$

$4x^2 + 11x - 15 < -14x + 6 \;\; \Leftrightarrow 4x^2 + 25x - 21 < 0$

$\Delta = 961 \;\;, x_1 = \frac{3}{4}\; et x_2 = -7$. Comme $a = 4 > 0$ *(on peut faire un tableau)* alors $S = \;[-7\,;\,\frac{3}{4}]$

3. Résoudre dans ℝ l'inéquation : $\frac{x^2+1}{2x+4} \geq 1$

$2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Pour $x \neq -2$, $\;\frac{x^2+1}{2x+4} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{2x+4} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x-3}{2x+4} \geq 0$

Le polynôme $x^2 - 2x - 3$ possède deux racines distinctes : $x_1 = -1\; et x_2 = 3$

$2x + 4 > 0 \Leftrightarrow x > -2$

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
Signe de $x^2 - 2x - 3$ a=1>0		+		+	0	-	0	+	
Signe de $2x + 4$ m=2>0		-	0	+		+		+	
Signe de $\frac{x^2-2x-3}{2x+4}$		-	‖	+	0	-	0	+	

S=]−2; −1] ∪ [3; +∞[

4. Résoudre dans ℝ l'équation : $\frac{x+1}{2x+1} > \frac{x}{x-1}$

Pour $x \neq -\frac{1}{2}\; et\; x \neq 1$, $\frac{x+1}{2x+1} > \frac{x}{x-1} \Leftrightarrow \frac{x+1}{2x+1} - \frac{x}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-1)-x(2x+1)}{(2x+1)(x-1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2-x-1}{(2x+1)(x-1)} > 0$

Le polynôme $-x^2 - x - 1$ n'a aucune racine réelle car $\Delta = -3 < 0$: il est toujours négatif (signe de a)

x	$-\infty$		-1/2		1		$+\infty$
$-x^2 - x - 1$		-		-		-	
$2x + 1$		-	0	+		+	
$x - 1$		-		-	0	+	
quotient		-	‖	+	‖	-	

$$S =]-\frac{1}{2}; 1[$$

Exercice 3-3 :

Les fonctions f et g sont définies sur ℝ par $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 4$ et $g(x) = 2x^3 - 3x - 5$

1. Déterminer l'expression de la fonction $d(x) = f(x) - g(x)$

$$d(x) = f(x) - g(x) = -4x^2 + 3x + 1$$

2. Etudier la position relative de $C_f\; et\; C_g$.

Il faut étudier le signe de $d(x) = \;f(x) - g(x)$.

Or $\Delta = b^2 - 4ac = 9 + 16 = \;25 > 0\;\; puis\; x_1 = \;-\frac{1}{4}\; et\; x_2 = 1$

x	$-\infty$		-1/4		1		$+\infty$
d(x)= f(x)-g(x)		-	0	+	0	-	

C_f est en-dessous de C_g sur $]-\infty\,;-\frac{1}{4}[$ et $]1\,;+\infty[$

C_f est au-dessus de C_g sur $]-\frac{1}{4}; 1[$

C_f et C_g se coupent aux points d'abscisses $-\frac{1}{4}$ et 1

Exercice 3-4 :

1. **Ecrire sous la forme d'une seule exponentielle :** $A = e^{-1} \times e \times e^{-5} \times (e^{-3})^4$.

$$A = e^{-1} \times e \times e^{-5} \times (e^{-3})^4 = e^{-1} \times e^{1} \times e^{-5} \times e^{-12} = e^{-1+1-5-12} = e^{-17}$$

2. **Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :** $e^{2x+1} = 1$

$e^{2x+1} = 1 \Leftrightarrow e^{2x+1} = e^0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \quad S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

3. **Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :** $\frac{e^{x^2}}{e^{4x}} > e^{-5} \times e^2$

$$\frac{e^{x^2}}{e^{4x}} > e^{-5} \times e^2 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x^2-4x} > e^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x > -3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 3 > 0$$

Les racines sont $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$ et $a > 0$ donc $S =]1; 3[$

4. **Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :** $4e^{2x} - 3e^x - 1 = 0$

Méthode :On pose $X = e^x$ et l'équation devient $4X^2 - 3X - 1 = 0$

$X_1 = -\frac{1}{4}$ et $X_2 = 1$

$4e^{2x} - 3e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = -\frac{1}{4}$ ou $e^x = 1$

$\Leftrightarrow \quad x = 0$ car une exponentielle est toujours positive donc $S = \{0\}$

Exercice 3-5 :

1. Factoriser au maximum : $A = 3x + 27x^2 + 15x^3$

$$A = 3x + 27x^2 + 15x^3 = 3x(1 + 9x + 5x^2)$$

Le trinôme $1 + 9x + 5x^2$ ne se factorise pas car $\Delta < 0$

2. Factoriser au maximum : $B = 2xe^{3x} - 3e^{3x} - (4x^2 + 2)e^{3x}$

$$B = 2xe^{3x} - 3e^{3x} - (4x^2 + 2)e^{3x} = e^{3x}(2x - 3 - 4x^2 - 2) = e^{3x}(-4x^2 + 2x - 5)$$

Le trinôme $(-4x^2 + 2x - 5)$ ne se factorise pas car $\Delta < 0$

3. Démontrer que pour tout réel x, $\frac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x} = \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}$

Pour tout nombre réel x, $\frac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x} = \frac{e^x(e^{-x}-e^x)}{e^x(e^{-x}+e^x)} = \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}$

Autre méthode :

mettre les deux quotients au me^me dénominateur et comparer les numérateurs obtenus

4. Dresser le tableau de signes de f sur son ensemble de définition : $f(x) = \frac{6x^3-8x^2}{e^x-1}$

$6x^3 - 8x^2 = 2x^2(3x - 4)$ et $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$

x	$-\infty$		0		$4/3$		$+\infty$
$2x^2$		+	0	+		+	
$3x - 4$		-		-	0	+	
$e^x - 1$		-	0	+		+	
$f(x)$		+	0	-	0	+	

Thème 4 : Dérivation

Exercice 4-1 : Calculer les dérivées des fonctions après avoir précisé les ensembles de dérivation :

1. f est définie par $f(x) = -5x^4 + 3x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{6}$.

   f dérivable sur $\mathbb{R}$. $f'(x) = -20x^3 + 6x - \frac{1}{2}$

2. f est définie par $f(x) = \frac{1}{x^7} = x^{-7}$

   f dérivable sur]- ∞ ; 0 [et sur] 0 ;+∞[. $f'(x) = -7x^{-7-1} = -\frac{7}{x^8}$

3. f est définie par $f(x) = 6\sqrt{x} - \frac{1}{3}$

   f dérivable sur]0 ;+∞[$f'(x) = 6 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{\sqrt{x}}$

4. f est définie par $f(x) = (2x-1)e^x$.

   f dérivable sur $\mathbb{R}$. $f'(x) = 2e^x + (2x-1)e^x = (2x+1)e^x$. $\boldsymbol{(uv)' = u'v + uv'}$

5. f est définie par $f(x) = \frac{2x+1}{x^2}$.

   f dérivable sur]- ∞ ; 0 [et sur] 0 ;+∞[. $f'(x) = \frac{2x^2 - 2x(2x+1)}{x^4} = \frac{-2x(x+1)}{x^4}$ $\boldsymbol{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}}$

6. f est définie par $f(x) = 4e^{-2x} + 1$.

   f dérivable sur $\mathbb{R}$. $f'(x) = 4 \times (-2)e^{-2x} = -8\,e^{-2x}$ $\boldsymbol{\left(e^{ax+b}\right)' = a \times e^{ax+b}}$

Exercice 4-2 :

Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 3x + 1$ et $g(x) = 2x^3 - 3x - 1$

1. Déterminer l'expression de la fonction $d(x) = f(x) - g(x)$

   $d(x) = f(x) - g(x) = x^4 - 2x^3 + 2$

2. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de d et déterminer $d'(x)$.

   d est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et $d'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x-3)$

3. Etudier le signe de d' puis dresser le tableau de variation de d.

   $d'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x-3)$. $2x^2 \geq 0$ donc $d'(x)$est du signe de $(2x-3)$

x	-∞		0		3/2		+∞
$d'(x)$		-	0	-	0	+	
$d(x)$	↘				0,3125	↗	

$$d\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^4 - 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 2 = \frac{81}{16} - \frac{9}{2} + 2 = \frac{5}{16} = 0{,}3125$$

4. Déterminer le minimum de d sur $\mathbb{R}$.

   Le minimum de d sur $\mathbb{R}$ est 0,3125 atteint pour $x = 1{,}5$

5. En déduire la position relative de Cf et Cg.

   Le minimum de d sur $\mathbb{R}$ est 0 ,3125, il est donc strictement positif. Donc $d(x) > 0$ pour tout x réel,soit $f(x) > g(x)$. La représentation graphique de $f$est donc toujours au-dessus de celle de g.

6. Donner l'équation de la tangente à Cf au point d'abscisse 1.

   $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ Or $f'(x) = 4x^3 - 3$ donc $f'(1) = 1$ *et* $f(1) = -1$

   d'où T : $y = (x-1) - 1$ donc : T : $y = x - 2$

7. Trouver l'abscisse a des points tels que la tangente à Cf en a, soit parallèle à la tangente à Cg en a.

La tangente à Cf en a est parallèle à la tangente à Cg en a

$\Leftrightarrow f'(a) = g'(a)$ $\Leftrightarrow 2a^2(2a-3) = 0$

$\Leftrightarrow 4a^3 - 3 = 6a^2 - 3$ $\Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } a = 1{,}5$

Aux points d'abscisse 0 et 1,5 les tangentes à Cf et à Cg sont parallèles.

Thème 5 : Probabilités

Exercice 5-1 :

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation.

   Faire un arbre en commançant par R et $\overline{R}$.

2. Quelle est la probabilité que la journaliste interroge un candidat admis et ayant révisé ?

$$P(A \cap R) = P(R) \times P_R(A) = 0{,}8 \times 0{,}95 = 0{,}76$$

3. Quelle est la probalité qu'il soit admis tout en n'ayant pas révisé ?

$$P(A) = P(A \cap R) + P(A \cap \overline{R}) \Leftrightarrow 0{,}82 = 0{,}76 + P(A \cap \overline{R}) \Leftrightarrow P(A \cap \overline{R}) = 0{,}06$$

4. En déduire que $P_{\overline{R}}(A) = 0{,}3$.

$$P_{\overline{R}}(A) = \frac{P(A \cap \overline{R})}{P(\overline{R})} = \frac{0{,}06}{0{,}2} = 0{,}3$$

5. Montrer que la probabilité qu'il ait menti sur le parvis du lycée est de 0,9.

$$P(A \cap R) + P(\overline{A} \cap \overline{R}) = 0{,}76 + P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(\overline{A}) = 0{,}76 + 0{,}2 \times 0{,}7 = 0{,}9$$

6. Cette fois-ci, la journaliste a choisi un candidat non admis au baccalauréat.

   a. Quelle est la probabilité que ce candidat ait révisé ?

$$P_{\overline{A}}(R) = \frac{P(\overline{A} \cap R)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}8 \times 0{,}05}{1 - 0{,}82} \approx 0{,}22$$

   b. Montrer que la probabilité que ce soit « un menteur » est d'environ 0,78.

$$P_{\overline{A}}(\overline{R}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{R})}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}2 \times 0{,}7}{(1 - 0{,}82)} \approx 0{,}78$$

7. Y a-t-il plus de chances que le candidat interwievé soit un menteur s'il est admis ou s'il est refusé ?

$$P_A(R) = \frac{P(A \cap R)}{P(A)} = \frac{0{,}8 \times 0{,}95}{0{,}82} \approx 0{,}93$$

   Donc $P_{\overline{A}}(R) < P_A(R)$ c'est-à-dire qu'il y a plus de chances que le candidat interwievé soit un menteur s'il est admis.